

# Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von Metallen und Halbleitern

Gruppe 24:  
Alex Baumer,  
Axel Öland,  
Manuel Diehm

17. Februar 2005

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>1</b>
2.1	Elektrische Leitung . . . . .	1
2.2	Das Energiebändermodell . . . . .	2
2.3	Metallische Leiter . . . . .	2
2.4	Halbleiter . . . . .	3
2.4.1	Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerkonzentration . . . . .	3
2.4.2	Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit . . . . .	3
2.4.3	Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerbeweglichkeit . . . . .	4
2.5	Spannungsmessung nach der Vier-Punkt-Methode . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Versuchsaufbau</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>4</b>
4.1	Bestimmung des linearen Widerstandskoeffizienten $\alpha$ von Gold . . . . .	4
4.1.1	Mathematische Herleitung des Zusammenhangs $\alpha = \frac{m}{b}$ . . . . .	4
4.1.2	Tabelle mit Werten für m, b und $\alpha$ . . . . .	5
4.2	Bestimmung der Bandlücke $E_g$ von Silizium . . . . .	5
4.2.1	Berechnung der Werte für $E_g$ . . . . .	7

## 1 Einleitung

Bei diesem Versuch soll die Leitfähigkeit von Metallen und Halbleitern in Abhängigkeit von der Temperatur untersucht werden. Dazu wird bei konstantem Strom jeweils an Gold sowie an Silizium die Spannung gemessen.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Elektrische Leitung

Grundlage für jede elektrische Leitung ist das Vorhandensein beweglicher Ladungsträger. Man unterscheidet dabei

- Elektronenleitung (z.B. in Festkörpern)

- Ionenleitung (z.B. in Elektrolyten)

Bei unserem Versuch spielt nur die Elektronenleitung in Festkörpern eine Rolle, da Gold und Silizium im gesamten von uns untersuchten Temperaturbereich als feste Phase vorliegen. Bezüglich ihrer elektrischen Leitfähigkeit erfolgt die Einteilung der Festkörper in drei Klassen:

- Leiter (z.B. Gold)
- Halbleiter (z.B. Silizium)
- Isolatoren (z.B. Aluminiumoxid)

Folgende physikalische Größen sind bei der Beschreibung der elektrischen Leitfähigkeit von besonderer Bedeutung:

$\sigma$ : Die elektrische Leitfähigkeit; Kehrwert des spezifischen Widerstands  $\rho$   $\left[ \frac{1}{\Omega \cdot m} \right]$

$e$ : Die Elementarladung; Ladung eines Elektrons  $1,6 \cdot 10^{-19} C$

$n$ : Dichte der Ladungsträger; Quotient aus Anzahl der bewegungsfähigen Ladungsträger (N) und dem Volumen (V):  $n = \frac{N}{V}$   $\left[ \frac{1}{m^3} \right]$

$\mu$ : Beweglichkeit von Ladungsträgern; Verhältnis ihrer mittleren Geschwindigkeit ( $\bar{v}$ ) zur elektrischen Feldstärke (E):  $\mu = \frac{\bar{v}}{E}$   $\left[ \frac{m^2}{V \cdot s} \right]$

## 2.2 Das Energiebändermodell

In Atomen besetzen die Elektronen normalerweise diskrete Energieniveaus, die Orbitale. Bei Atomen in einem Kristallgitter (wie bei einem Metall oder Halbleiter) spalten sich die einzelnen Niveaus der Atome infolge von Wechselwirkungen mit den anderen Atomen des Gitters auf und es entstehen Bereiche in denen die aufgespaltenen Niveaus energetisch so dicht zusammen liegen, dass man von Energiebändern spricht. Die Bereiche zwischen den Bändern entsprechen Energien, die nicht auftreten können.

Elektronen in Bändern mit vollbesetzten Niveaus sind nicht frei beweglich und ergeben daher keine Leitfähigkeit. Das letzte voll besetzte Energieband bezeichnet man als **Valenzband**.

Elektronen in Bändern mit unvollständig besetzten Energieniveaus sind frei beweglich. Ein solches Band bezeichnet man als **Leitungsband**.

## 2.3 Metallische Leiter

**Bandstruktur eines Metalls:** Hier ist das Leitungsband ständig teilweise gefüllt, so dass immer freie Elektronen zur Leitung zur Verfügung stehen. Den höchsten besetzten Energiezustand bezeichnet man als Fermienergie.

Bei Metallen geht man vom Modell des idealen Elektronengases (Drude-Modell) aus. Dabei nimmt man an, dass die Elektronen im Metall wie die Atome eines idealen Gases frei beweglich vorliegen. Daraus kann man für die Leitfähigkeit folgenden Zusammenhang herleiten:

$$\sigma = e \cdot n \cdot \mu \quad \left[ \frac{1}{\Omega \cdot m} \right] \quad (1)$$

Im Drude-Modell werden die Elektronen nur durch Stöße mit den Atomrümpfen in ihrer Bewegung behindert. Daraus ergibt sich folgende Gleichung für die Beweglichkeit der Elektronen:

$$\mu = \frac{e}{m} \cdot \tau \quad \left[ \frac{m^2}{V \cdot s} \right] \quad (2)$$

Das Drude-Modell enthält zwei Fehlannahmen:

1. Alle freien Elektronen nehmen an der Leitung teil

## 2. Die Elektronen streuen an den Atomrümpfen des Kristalls

Aber diese beiden Fehler heben sich gegenseitig auf, so dass das Modell trotzdem brauchbar ist. Die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit wird fast ausschließlich durch die Beweglichkeit der Elektronen bestimmt, da die Konzentration der Ladungsträger temperaturunabhängig ist. Die Beweglichkeit der Elektronen wird maßgeblich durch zwei Faktoren behindert:

1. Störstellenstreuung: Fehler und Fremdatome im Kristallgitter behindern die Elektronen. Diese Störstellen behindern auch noch bei sehr tiefen Temperaturen die Leitung und ergeben somit einen Restwiderstand  $\rho_{st}$
2. Phononenstreuung: Mit Steigender Temperatur beginnen sich Gitterschwingungen (Phononen) auszubilden, die als Streuzentren für die Elektronen wirken. Der aus der Phononenstreuung resultierende Widerstand  $\rho_{ph}$  ist bis auf einen Anfangsbereich (hier:  $\sim T^5$ ) proportional zur Temperatur (T).

Die beiden Teilbeiträge ( $\rho_{st}$  und  $\rho_{ph}$ ) addieren sich zum Gesamtwiderstand ( $\rho$ ):

$$\rho = \rho_{st} + \rho_{ph} \quad \text{Matthiesens'sche Regel} \quad (3)$$

## 2.4 Halbleiter

**Bandstruktur eines Halbleiters:** Das Leitungsband ist leer. Elektronen müssen, um zur Leitung beitragen zu können, entweder von Donatoratomen (im n-dotierten Halbleiter) oder aus dem Valenzband in das Leitungsband angehoben werden.

Auch bei Halbleitern kann man das Modell des idealen Elektronengases verwenden, allerdings muss dieses modifiziert werden, da zum einen die Konzentration der Leitungselektronen in Abhängigkeit von der Temperatur nicht mehr konstant ist und zum anderen tragen auch positiv geladene Löcher (Löcherkonzentration p) zur Leitung bei. Für die Leitfähigkeit bei Halbleitern gilt allgemein:

$$\sigma = n \cdot e \cdot \mu_n + p \cdot e \cdot \mu_p \quad (4)$$

### 2.4.1 Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerkonzentration

Die Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerkonzentration kann man grob in drei Bereiche unterteilen, die sich aus dem Bändermodell erklären lassen.

1. **Störstellenreserve**, bei niedriger Temperatur werden nur wenige Elektronen von den Donatoratomen in das Leitungsband gehoben. Hier gilt:

$$n \sim \exp\left(-\frac{E_d}{2kT}\right) \quad (5)$$

2. **Störstellenerschöpfung**, die Donatoratome haben alle möglichen Elektronen in das Leitungsband abgegeben und die Ladungsträgerzahl bleibt konstant.
3. **Eigeneleitung**, jetzt reicht die thermische Energie, um Elektronen aus dem Valenz in das Leitungsband zu befördern. Hier gilt:

$$n \sim \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right) \quad (6)$$

### 2.4.2 Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit

1. T klein: Streuung an Störstellen  $\mu \sim T^{3/2}$
2. T groß: Streuung an Phononen  $\mu \sim T^{-n}$   
(n hängt von der Art der Phononen ab. Empirisch zwischen 1 und 2,5)

### 2.4.3 Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerbeweglichkeit

Diese ergibt sich gemäß  $\sigma = en\mu$  aus der Beweglichkeit und der Ladungsträgerkonzentration.  $\ln\sigma$  gegen  $1/T$  aufgetragen ergibt einen Arrheniusplot.

## 2.5 Spannungsmessung nach der Vier-Punkt-Methode

Bei der Spannungsmessung mit zwei Kontakten ergibt sich das Problem, dass sowohl die Leitungen als auch die Kontakte selbst einen Widerstand besitzen und sobald diese Widerstände in der Größenordnung des Probenwiderstandes liegen ist eine ausreichend genaue Messung nicht mehr möglich.

Dieses Problem umgeht man durch die Vierpunktmessmethode, bei der Stromzufuhr und Spannungsmessung über getrennte Kontakte erfolgt. Die vier Kontakte werden linear und äquidistant angeordnet auf die Probenoberfläche gesetzt und sind zusätzlich gefedert um Unebenheiten auszugleichen. Die Stromzufuhr erfolgt über die beiden äußeren Kontakte, während an den beiden inneren Kontakten die Spannung abgegriffen wird. Dadurch, dass die Spannungsmessung hier an einem hochohmigen Widerstand erfolgt, fließt fast kein Strom durch den Messstromkreis, so dass auch an den Kontaktwiderständen kaum Spannung abfällt.

Nachmathematischer Betrachtung, deren Ausgangspunkt das Ohmsche Gesetz ( $R = U \cdot I$ ) ist, und in die unter anderem auch die Probengeometrie einfließt, gelangt man zu folgender Formel für den spezifischen Widerstand ( $\rho$ ):

$$\rho = \frac{\pi}{\ln 2} \cdot \omega \cdot \frac{U}{I} \quad (7)$$

Bedingung für die Anwendbarkeit der Formel ist weiterhin, dass der Abstand der Kontakte ( $s$ ) klein ist zur Probenbreite ( $b$ ).

## 3 Versuchsaufbau

Als Probe wird zum einen eine sehr dünne Goldschicht, die auf Aluminiumoxid aufgebracht ist, verwendet und zum anderen ein Plättchen Silizium, das mit seiner ungeschliffenen Seite verwendet wird um einen besseren Kontakt, der durch die passivierte Oberfläche ( $SiO_2$ ) gestört wird, zu erreichen. Die Proben befinden sich jeweils in einem aus Alu-Folie gebauten Behälter, der im Fall des Silizium noch in einen weiteren größeren Behälter aus Alu-Folie gestellt wird. In den Zwischenraum zwischen den Behälter wird dann der flüssige Stickstoff zum Kühlen eingefüllt. Auf die Proben werden senkrecht von oben die von einem Stativ gehaltenen Kontakte aufgesetzt.

## 4 Auswertung

### 4.1 Bestimmung des linearen Widerstandskoeffizienten $\alpha$ von Gold

Zur Bestimmung des linearen Widerstandskoeffizienten wird an einer Auftragung (siehe: Abb.1) des spezifischen Widerstandes  $[\rho]$  über die Temperatur  $[T]$  die Steigung  $[m]$  und der Y-Achsenabschnitt  $[b]$  ermittelt<sup>1</sup> und anschließend über den Quotienten  $\frac{m}{b}$  beider Werte  $\alpha$  errechnet.

#### 4.1.1 Mathematische Herleitung des Zusammenhangs $\alpha = \frac{m}{b}$

Ansatz:

$$\rho(T) = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot T) \leftrightarrow \rho(T) = \rho_0 + \alpha \cdot T \cdot \rho_0 \quad (8)$$

<sup>1</sup>z.B. mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms.

Analog zur allgemeinen Form der Geradengleichung  $[f(x) = mx + b]$  ist die Steigung des Graphen gerade  $\alpha \cdot \rho_0$  und der Y-Achsenabschnitt entspricht  $\rho_0$ .

$$m = \rho_0 \cdot \alpha \quad (9)$$

$$b = \rho_0 \quad (10)$$

Aus der Kombination beider Gleichungen erhält man schließlich:

$$\alpha = \frac{m}{b} \quad (11)$$

#### 4.1.2 Tabelle mit Werten für m, b und $\alpha$

Aus den ermittelten Werten für m und b lässt sich nun  $\alpha$  bestimmen. Der erste Wert ist berechnet für den Erwärmungsvorgang, der Zweite für das Abkühlen.

$\mathbf{m} \left[ \frac{\Omega \cdot \text{m}}{\text{K}} \right]$	$\mathbf{b} \left[ \Omega \cdot \text{m} \right]$	$\mathbf{\alpha} \left[ \frac{1}{\text{K}} \right]$
$1,33 \cdot 10^{-9}$	$2,89 \cdot 10^{-7}$	0,004602
$1,43 \cdot 10^{-9}$	$2,47 \cdot 10^{-7}$	0,005289

Literaturwert<sup>2</sup>: Temperaturkoeffizient  $\alpha = 3,9 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}}$ , für Gold im Temperaturbereich von 0°C - 100°C. Der von uns ermittelte Wert liegt in der gleichen Größenordnung und kann somit im Rahmen der Messgenauigkeit als korrekt ermittelt angenommen werden.

## 4.2 Bestimmung der Bandlücke $E_g$ von Silizium

Ansatz:

$$\sigma \sim \exp\left(\frac{-E - g}{2kT}\right) \quad (12)$$

$$\Rightarrow \sigma = \sigma_0 \cdot \exp\left(\frac{-E - g}{2kT}\right) \quad (13)$$

Umformen ergibt:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \exp\left(\frac{-E_g}{2kT}\right) \quad (14)$$

hier werden nun die Einheiten gekürzt, damit bei der nun folgenden Logarithmierung keine logarithmischen Einheiten entstehen:

$$\ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) = \frac{-E_g}{2kT} \quad (15)$$

Eine weitere Umformung ergibt:

$$\ln(\sigma) = \frac{-E_g}{2k} \cdot \frac{1}{T} + \ln(\sigma_0) \quad (16)$$

Auch hier ist wieder eine Geradengleichung erkennbar, mit

$$y = \ln(\sigma) \quad x = \frac{1}{T} \quad b = \ln(\sigma_0) \quad m = \frac{-E_g}{2k} \quad (17)$$

Daraus folgt nun, dass  $E_g = -2 \cdot k \cdot m$  ist. m kann als Steigung des Arrheniusplots am Beginn des Graphen in Abb. 2 im Bereich  $x < 0,002 \text{ 1/K}$  abgelesen werden.

<sup>2</sup>Aus: H.Kuchling, Taschenbuch der Physik, Fachbuchverlag Leipzig, 2001

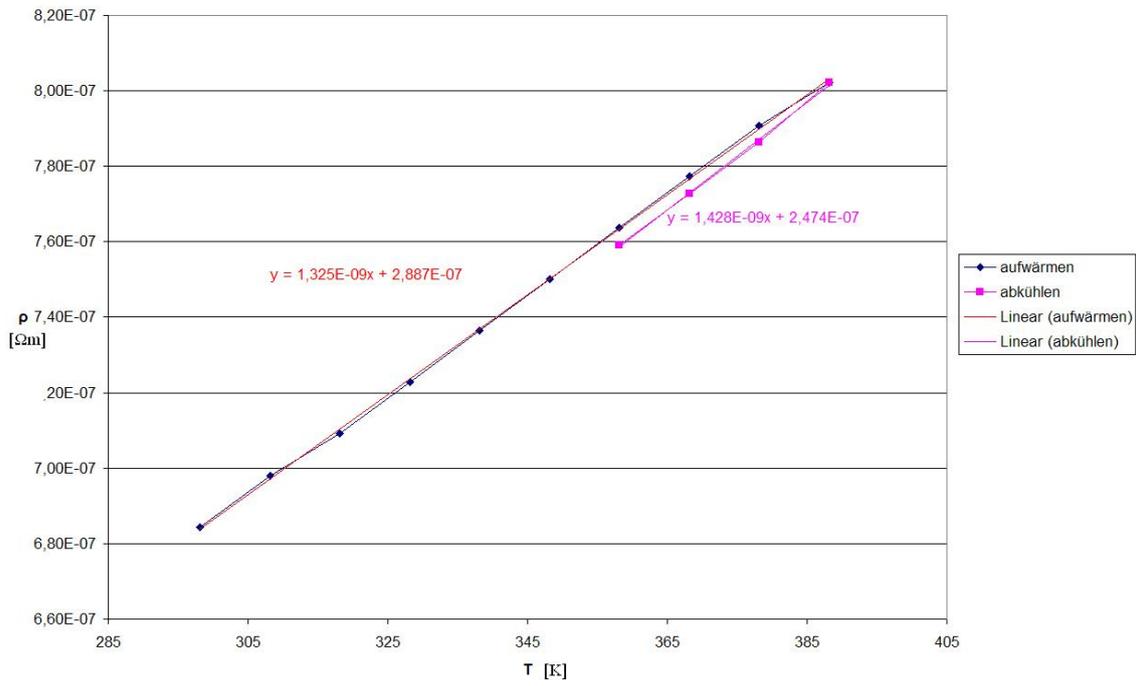


Abbildung 1: Auftragung  $\rho$  über  $T$

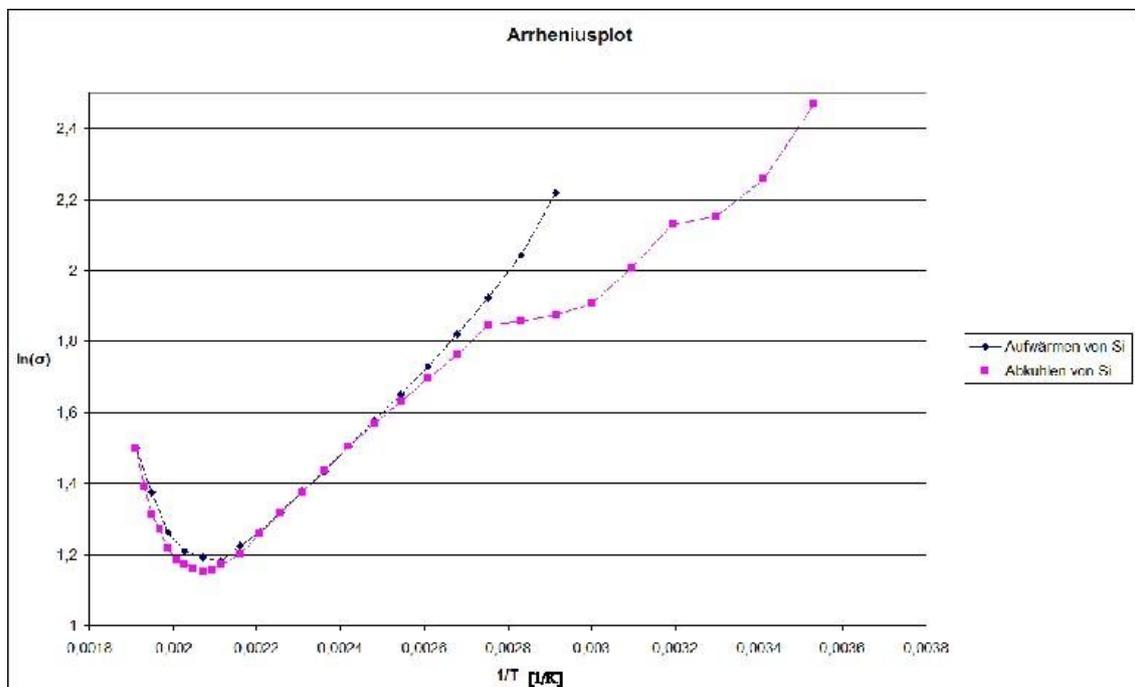


Abbildung 2: Arrheniusplot,  $\ln\sigma$  über  $\frac{1}{T}$

#### 4.2.1 Berechnung der Werte für $E_g$

Die erste Reihe bezieht sich auf die Messreihe beim Erwärmen, der Zweite auf die Messungen beim Abkühlen.

$m$ [K]	$E_g$ [J]	$E_g$ [eV]
-2601,3	$7,18 \cdot 10^{-20}$	0,449
-2734,9	$7,54 \cdot 10^{-20}$	0,471

Die Werte für Aufheizen und Abkühlen unterscheiden sich kaum. Der Wert beim Abkühlen liegt etwas näher am Literaturwert, aber ein bedeutsamer Unterschied liegt nicht vor.

Literaturwert<sup>3</sup>: Bandlücke  $E_g = 1,1eV$  für Silizium. Obwohl auch hier die Größenordnung stimmt, liegt der gemessene Wert mit ca. der Hälfte des Literaturwerts doch deutlich unter dem Literaturwert. Der Grund hierfür könnte in einer unzureichenden Messgenauigkeit liegen, da die Werte nur visuell abgelesen wurden. Eine Andere Möglichkeit ist, dass der Kontakt schon vor dem entgültigen Abbruch gestört war und somit falsche Messwerte zustande kamen.

Auf die Gleiche Weise kann man auch das Donator-Niveau  $E_D$  bestimmen. bei unserer Messung verhinderte allerdings der Abbruch des Kontakts zwischen Spannungsmessgerät und Probe die Messung des zweiten linearen Teilstücks.

---

<sup>3</sup>Aus: H.Kuchling, Taschenbuch der Physik, Fachbuchverlag Leipzig, 2001