VWA
Verwaltungs- und Wirtschafts-Akademie Wiesbaden

Abschlussklausur

Lehrveranstaltung:	**Wirtschaftsmathematik I I**
Dozent:	**König**
Termin:	**29. 11. 2004**
Verfügbare Zeit:	**90 Minuten**
Hilfsmittel:	**Formelsammlung, Taschenrechner**

Musterlösung

Aufgabe 1 (12 Min.)

Sie legen den Betrag von € 8.000,00 für 15 Jahre in einen Aktienfonds an, dessen Ausgabekurs einen Ausgabeaufschlag von 5% beinhaltet und der eine jährliche Rendite von 6,5% erbringt. Wie hoch ist Ihr Kapital nach 15 Jahren? Erläutern Sie Ihren Rechenweg.

Lösung

Ausgabekurs des Fonds: 105%
Ausgabeaufschlag für Vertrieb etc.: 5%
Tatsächlich angelegtes Kapital = Rücknahmekurs: 100%

K_0 = € 8.000 * $\frac{100}{105}$ = € 8.000 * 0,95238 = € 7.619,05.

Lösung mit Hilfe der Kapitalendwertformel:
$K_n = K_0 * (1 + i)^n$

K_0 = € 7.619,05
$i = 0{,}065$
$n = 15$

$K_n = K_{15} = K_0 * (1 + i)^{15}$
$K_n = K_{15}$ = € 7.619,05 * $(1 + 0{,}065)^{15}$
$K_n = K_{15}$ = € 7.619,05 * $(1{,}065)^{15}$
$K_n = K_{15}$ = € 7.619,05 * 2,571841
$K_n = K_{15}$ = € 19594,99

Nach 15 Jahren ist das gesamte Kapital auf € 19594,99 angewachsen.

Aufgabe 2 **(15 Min.)**

Nach wie vielen Jahren sind 1.000 € bei 8% Zinsen auf 100.000 € angewachsen? Erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

Lösung

In der Kapitalendwertformel ist die gesuchte Anzahl der Jahre n der Exponent im Aufzinsungsfaktors $(1 + i)^n$.

Die Lösung erhalten wir durch Logarithmierung der Kapitalendwertformel:

$$K_n = K_0 * (1 + i)^n \quad \Rightarrow \quad \lg K_n = \lg (K_0 * (1 + i)^n)$$

$$\lg K_n = \lg K_0 + n \lg (1 + i)$$

$$\lg K_n - \lg K_0 = n \lg (1 + i)$$

$$\frac{\lg K_n - \lg K_o}{\lg(1+i)} = n$$

$$n = \frac{\lg K_n - \lg K_o}{\lg(1+i)} = \frac{\lg 100.000 - \lg 1000}{\lg 1,08}$$

Es ist:

$\lg 100.000 = 5$, denn $10^5 = 100.000$

$\lg 100 = 3$, denn $10^3 = 1000$

$\lg 1,08 = 0,033424$, denn $10^{0,033424} = 1,08$ (Ermittlung mit Taschenrechner!)

Damit ergibt sich:

$$n = \frac{\lg K_n - \lg K_o}{\lg(1+i)} = \frac{\lg 100.000 - \lg 1000}{\lg 1,08} = \frac{5-3}{0,033424} = 59,8$$

Es dauert 59,8 Jahre bis 1000 € bei 8% Zinsen auf 100.000 € angewachsen sind.

Aufgabe 3 (10 Min.)

Ein gut verdienender Manager zahlt für seine private Altersvorsorge jährlich nachschüssig von 2005 bis 2029 € 10.000,00 in einen Banksparplan ein, der eine jährliche Rendite von 3,0% erzielt und für dessen Verwaltung ihm von der Bank keine Kosten belastet werden. Wie hoch ist sein gesamtes Kapital nach der letzten Einzahlung am Beginn des Jahres 2030? Erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

Lösung

Hier liegt der Fall jährlich nachschüssiger Rentenzahlungen vor.
Lösung mit Hilfe der Rentenendwertformel:

Z = € 10.000;
n = 25;
i = 0,03

$$Z_n = Z * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$Z_{25} = € 10.000 * \frac{(1+0{,}03)^{25} - 1}{0{,}03}$$

$$= € 364.592{,}64$$

Zu Beginn des Jahres 2030 ist das gesamte Kapital auf € 364.592,64 angewachsen.

<u>Aufgabe 4</u> (12 Min.)
Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $-4x^2 + 24x + 40 = 60$

b) $(2y-6)^2 = 0$

<u>Lösung</u>
<u>zu a)</u>

$-4x^2 + 24x + 40 = 60 \quad | -60$

$-4x^2 + 24x - 20 = 0 \quad | : (-4)$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

Lösung mit Hilfe der p-q-Formel:
$x^2 - 6x + 5 = 0$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$,

setzt man p = -6
und q = 5
erhält man:

$x_{1/2} = -(-\frac{6}{2}) \pm \sqrt{\left(\frac{(-6)^2}{4} - 5\right)}$

$x_{1/2} = +3 \pm \sqrt{4}$
$x_{1/2} = +3 \pm 2$
$x_1 = 1$ und $x_2 = 5$

<u>zu b)</u>

<u>Lösungsalternative 1:</u>

$(2y-6)^2 = 0 \quad | \sqrt{\ }$
$2y-6 = 0 \quad | +6$
$2y = 6 \quad | :2$
$y = 3$

<u>Lösungsalternative 2:</u>

$(2y-6)^2 = 0$

$4y^2 - 24y + 36 = 0 \quad | :4$

$y^2 - 6y + 9 = 0$

Lösung mit der p-q-Formel:

$y_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$,

setzt man p = -6
und q = 9
erhält man:

$y_{1/2} = -(-\frac{6}{2}) \pm \sqrt{\left(\frac{6^2}{4} - 9\right)}$

$y_{1/2} = +3 \pm \sqrt{0}$
$y_1 = y_2 = 3$

Es gibt nur eine Lösung!

Aufgabe 5 (9 Min.)

Bestimmen Sie die ersten Ableitungen nach x für folgende Funktionen:
a) $Y = 18x^7 - 12x^6 + 0{,}2x^3$
b) $Y = x^{40} + 0{,}8x^3 + 2x$
c) $Y = 22.000 + 28{,}5x + 3x^4 + \frac{2}{3}x^6$

Lösung:
zu a)
$Y' = 126x^6 - 72x^5 + 0{,}6x^2$

zu b)
$Y' = 40x^{39} + 2{,}4x^2 + 2$

zu c)
$Y' = 28{,}5 + 12x^3 + 4x^5$

Aufgabe 6 (11 Min.)

Bestimmen Sie die Grenzkostenfunktionen für folgende Kostenfunktionen:

a) $K = 2500 + 70x - 8x^2 + 0{,}5x^3$

b) $K = 1800 + 80x - 14x^2 + 1{,}3x^3$

c) $K = 1170 + 40x - (2x+3)^2 + 0{,}4x^3$

Lösung:
zu a)

$$K' = \frac{dK}{dx} = 0 + 70x^0 - 2*8x^1 + 3*0{,}5x^2$$
$$= 70 - 16x + 1{,}5x^2$$

zu b)

$$K' = \frac{dK}{dx} = 0 + 80x^0 - 2*14x^1 + 3*1{,}3x^2$$
$$= 80 - 28x + 3{,}9x^2$$

zu c)
$K = 1170 + 40x - (2x+3)^2 + 0{,}4x^3$
$K = 1170 + 40x - 4x^2 - 12x - 9 + 0{,}4x^3$
$K = 1161 + 28x - 4x^2 + 0{,}4x^3$

$$K' = \frac{dK}{dx} = 0 + 28x^0 - 2*4x^1 + 0{,}4*3x^2$$
$$= 28 - 8x + 1{,}2x^2$$

<u>Aufgabe 7</u> (21 Min.)

Ein Monopolist hat folgende Preis-Absatz-Funktion: p = 60 – 9x.
Seine Kostenfunktion lautet: K(x) = 6x + 18.
a) Ermitteln Sie rechnerisch die gewinnmaximale Preis-Mengen-Kombination.
b) Wie hoch ist der maximale Gewinn des Monopolisten?
Erläutern Sie jeweils Ihr Vorgehen.

<u>Lösung</u>
<u>zu a)</u>

Erlös E = E(x) = p*x
= $60x – 9x^2$

<u>Lösungsalternative 1:</u>

E'(x) = 60 - 18x

K'(x) = +6

Notwendige Bedingung für Gewinnmaximum:

Gewinnmaximum kann nur dort liegen, wo gilt:

E'(x) = K'(x)
60 - 18x = +6
54 = 18 x
x = 3

<u>Lösungsalternative 2:</u>

G(x) = E(x) - K(x)
G(x) = $60x – 9x^2$-(6x + 18)
G(x) = $-9x^2 + 54x - 18$

G'(x) = 54 - 18 x

Notwendige Bedingung für Gewinnmaximum:

Gewinnmaximum kann nur dort liegen, wo gilt:

G'(x) = 0
54 - 18 x = 0
54 = 18 x
x = 3

Nur bei x = 3 kann also ein Gewinnmaximum vorliegen.

Hinreichende Bedingung für Gewinnmaximum:
Test, ob G''(3) < 0, ob also wirklich ein Gewinnmaximum vorliegt.

G(x) = E(x) - K(x)
G(x) = $60x – 9x^2$-(6x + 18)
G(x) = $-9x^2 + 54x - 18$

G'(x) = 54 - 18 x

G''(x) = -18 < 0

G''(3) = -18 < 0; es liegt also wirklich ein Maximum bei x = 3 vor!

Den dazugehörigen gewinnmaximalen Preis erhält man durch Einsetzen von x = 3
in die Preis-Absatzfunktion mit:
P = 60 – 9*3 = 60 – 27 = 33

Die gewinnmaximale Preis-Mengen-Kombination liegt bei p = 33 Geldeinheiten
und x = 3 Mengeneinheiten.

<u>zu b)</u>

Den maximalen Gewinn erhält man durch Einsetzen von x = 3 in die Gewinnfunktion mit:
$G_{Max} = G(3) = - 9*3^2 + 54*3 - 18$
= -81 + 162 - 18 = 63.

Der maximal erzielbare Gewinn des Monopolisten beträgt 63 Geldeinheiten.